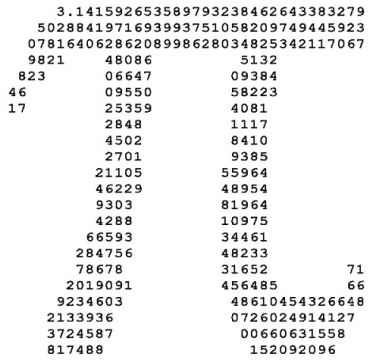
Carnegie Mellon University Qatar



Seventh Annual Pi Day Mathematics Competition

Preliminary Round Question Booklet

2024

π goes on and on,
and e is just as cursed.
I wonder, how does π begin
When its digits are reversed?

- Martin Gardner

Carnegie Mellon University Qatar

Pi Day Mathematics Competition

Rules of the Competition

- This test consists of 40 multiple choice questions. Each question is followed by answers marked A, B, C, D, and E. Only one of these is correct.
- Mark your answer to each problem on the provided answer sheet. For each question, blacken the circle corresponding to at most one answer choice. Completely erase errors and any stray marks. Only answers properly marked on the answer sheet will be graded.
- SCORING: There are three sections in this test.

  Section 1 consists of 25 questions, each one worth one point. Section 2 consists of 10 questions, each one worth two points. Section 3 consists of 5 questions, each one worth three points.

  A correct answer to a question earns the full point value of the question. An incorrect answer carries a penalty of 25% of the point value of the question (that is, there is a penalty of 0.25 for incorrect answers in Section 1, a penalty of 0.5 for incorrect answers in Section 2, and a penalty of 0.75 for incorrect answers in Section 3). You neither win nor lose points for questions that are left unanswered.
- Contestants may **not** consult textbooks, notes, other people (apart from teammates), electronic devices (including calculators, mobile phones, etc.), or any other resources during the test.
- Figures are not necessarily drawn to scale.
- Before beginning the test, please make sure to write the name of your school and the names of all members of the team on the answer sheet.
- You have **90 minutes** to complete the test.
- At the end of the 90 minutes, each team should submit one answer sheet.

Section 1

There are 25 questions in this section. Each question is worth 1 point. An incorrect answer carries a penalty of 0.25 points.

1. If $a > b > 0$ and $\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a}{b}$, what is the value of $\dfrac{a}{b}$?

   a) 2 b) 3 c) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ d) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ e) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

2. If $\sqrt{1+2\sqrt{x}} = 3$, what is the value of x?

   a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 16

3. If $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 13\sqrt{3}$, then x equals

   a) 0 b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{13\sqrt{3}-9}{9}$ d) $\sqrt{3}$ e) $\dfrac{13\sqrt{3}-3}{9}$

4. If a, b, c, d are nonzero and $a = \dfrac{2b}{3}$ and $b = \dfrac{3c}{5}$ and $d = \dfrac{4c}{5}$, what is the value of $\dfrac{d}{a}$?

   a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

5. At the Qatar Open Tennis Tournament, a total of 28 players compete in a single elimination format (that is, after each match, the winning player stays in the competition and the losing player is eliminated). How many matches are played in the tournament?

   a) 26 b) 27 c) 28 d) 29 e) 30

6. Let $f(x) = 3x + 4$. Which value x satisfies $f(x) = f^{-1}(x)$?

   a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

7. The sum of interior angles of a polygon is $1620°$. How many sides does the polygon have?

   a) 8 b) 11 c) 12 d) 15 e) 18

8. Four numbers are equally spaced on the number line in the (decreasing) order $\dfrac{1}{20}, \dfrac{1}{22}, x, y$. What is the value of y?

   a) $\dfrac{1}{26}$ b) $\dfrac{2}{21}$ c) $\dfrac{3}{44}$ d) $\dfrac{2}{55}$ e) $\dfrac{3}{26}$

9. The graph of a line in the $xy-$plane has a slope $\frac{1}{2}$ and passes through the point $(4, 5)$. The graph of a second line has a slope $\frac{2}{3}$ and passes through $(-2, 3)$. If the two lines intersect at the point (a, b), what is the value of $a + b$?

a) -5 b) -6 c) -7 d) -8 e) -9

10. Hala and Erica arrange to meet at a cafe. Erica leaves work, walking at 6 km/h. Five minutes later, Hala starts cycling from her apartment at 20 km/h. A further 15 minutes later, both arrive at the cafe at the same time. What is the total distance they travelled?

a) 5.5 km b) 6 km c) 6.5 km d) 7 km e) 7.5 km

11. If x is a root of the equation $\sin^2 x + 2\sin x = 2 - \cos^2 x$, then which of the following numbers could be a possible value of x?

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{6}$ e) $\frac{5\pi}{4}$

12. Let m and n be positive integers. If $m + mn + n = 54$, then which of the following set of values give a complete solution for m?

a) $\{1, 13\}$ b) $\{2, 7\}$ c) $\{4, 10\}$ d) $\{3, 11\}$ e) $\{5, 11\}$

13. Given that the greatest common divisor of p and q is t, and that $q = rt$, then the least common multiple of p and q will always be equal to

a) pq b) qr c) rt d) pr e) pt

14. Three vertices of a rectangle are at the points $(1, 4)$, $(7, 4)$, and $(1, 8)$. At which point do the diagonals of the rectangle cross?

a) $(4, 6)$ b) $(3, 2)$ c) $(3, 1)$ d) $(5, 6)$ e) $(7, 8)$

15. Four circles each have radius 2 units. The centers of the circles form a square of side length 3 units. What is the total number of intersections between the circles?

a) 6 b) 8 c) 9 d) 10 e) 12

16. How many positive integers less than or equal to 1000 are divisible by either 2, 3, or 5?

a) 367 b) 483 c) 551 d) 617 e) 734

17. The number of distinct real numbers satisfying the equation $x^3 + x - 8 = \frac{8}{x^2}$ is

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

18. The sides of a triangle have lengths 8, 11, and c, where c is an integer. For how many values of c is the triangle acute?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

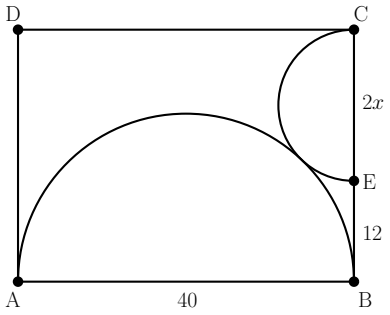
19. Let n be a positive integer such that $2024n + 7$ is divisible by 17. What is the smallest value of n?

a) 3 b) 6 c) 8 d) 9 e) 10

20. Simplify $\cfrac{2024}{2 + \cfrac{2024}{2 + \cfrac{2024}{2 + \cdots}}}$.

a) 1 b) 46 c) 44 d) 1012 e) 2024

21. In the figure below, $ABCD$ is a rectangle and the line segments AB and CE are diameters of (semi)circles which are tangent to each other. What is the value of x?



a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

22. A frog is sitting at the origin on the number line. Each minute, it jumps randomly one unit to the left or one unit to the right. What is the probability that it will be on the origin after the 6th jump?

a) $\frac{14}{64}$ b) $\frac{16}{64}$ c) $\frac{20}{64}$ d) $\frac{24}{64}$ e) $\frac{27}{64}$

23. Consider the function $f(x) = \sqrt{2 - |3 - 5x|}$. The domain of $f(x)$ is

a) $\left(-\frac{2}{3},\ 3\right]$ b) $\left[\frac{1}{5},\ 1\right]$ c) $\left[\frac{5}{3},\ 3\right]$ d) $(-2, \infty)$ e) $(0, 1)$

24. Let $|x+4| < |x-6|$. What is the value of the largest integer x satisfying the given condition?

    a) -3 b) -2 c) -1 d) 0 e) 1

25. Which of the following expressions is equal to the expression $\dfrac{a^2+b^2-9+2ab}{b^2-a^2+9-6b}$?

    a) $\dfrac{b-a-3}{a-b+3}$ b) $\dfrac{a+b-3}{b-a-3}$ c) $\dfrac{a+b+3}{b-a-3}$ d) $\dfrac{a+b-3}{a-b-3}$ e) $\dfrac{a+b+3}{b+a-3}$

Section 2

There are 10 questions in this section. Each question is worth 2 points. An incorrect answer carries a penalty of 0.5 points.

26. Ten students sit a test consisting of 20 questions. Two students get 8 questions correct and one student gets 9 questions correct. The remaining seven students all get at least 10 questions correct and the average number of questions answered correctly by these seven students is an integer. If the average number of questions answered correctly by all ten students is also an integer, then that integer is

    a) 14 b) 13 c) 12 d) 11 e) 10

27. A hotel has five rooms: A, B, C, D and E. Every room is shut and its door has a sign. It's known that exactly one of the signs is true and the rest are false. The signs on the doors read as follows:
    Door A: "There is a tiger in this room."
    Door B: "There is a tiger in exactly one of the rooms."
    Door C: "There is a tiger in this room."
    Door D: "There is a tiger in this room or there is a tiger in room E."
    Door E: "There is a tiger in room B."

    Which room or rooms have tigers?

    a) A alone has a tiger.

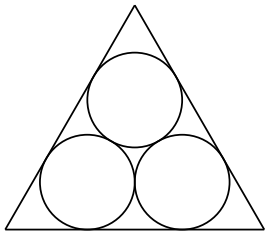
    b) There is a tiger in both rooms B and D.

    c) C alone has a tiger.

    d) B alone has a tiger.

    e) There is a tiger in both rooms D and E.

28. Three mutually tangent circles of radius 1 are bounded by an equilateral triangle whose sides are tangent to the circles as shown in the figure. What is the length of a side of the triangle?



a) $1+3\sqrt{3}$ b) $2+2\sqrt{3}$ c) $3+2\sqrt{3}$ d) $2+3\sqrt{3}$ e) $3+3\sqrt{3}$

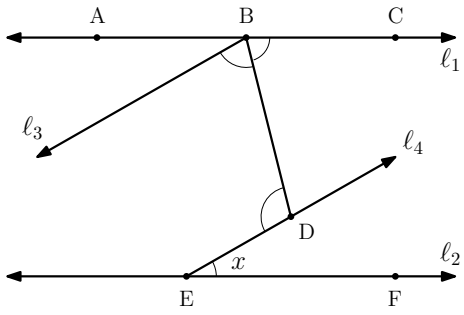
29. Fadhel multiplies 35 and a 3-digit number x and finds that the product is 4900. But while checking his calculations, he realizes that the correct tens place digit of the number x is 9, not the one that he has used. What is the correct result of the multiplication?

a) 6650 b) 6620 c) 6500 d) 6400 e) 5000

30. If $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{5n}\right)=63$, then what is n?

a) 20 b) 22 c) 24 d) 25 e) 30

31. In the given figure, the lines ℓ_1 and ℓ_2 are parallel to each other. Similarly, the lines ℓ_3 and ℓ_4 are parallel to each other. If BD is the angle bisector and the angle BDE is 110 degrees, what is the value of the angle DEF in degrees?



a) 25 b) 30 c) 35 d) 40 e) 45

32. A treasure chest starts with 4 copper coins, 4 silver coins, and 5 gold coins. When Midas randomly touches any colored coin, it magically disappears, and is replaced by two new coins that are of the complementary colors. For example, if Midas touches a silver coin, it

transforms into one copper coin and one gold coin. After two consecutive random Midas touches, what is the probability that the gold coins are still more numerous than either of the other two colors?

a) $\frac{36}{91}$ b) $\frac{32}{91}$ c) $\frac{13}{182}$ d) $\frac{77}{182}$ e) 1

33. What is the smallest positive integer x for which the sum $x + 2x + 3x + \cdots + 100x$ is a perfect square?

a) 202 b) 5050 c) 1010 d) 100 e) 101

34. Ten identical solid gold spheres are to be melted down and recast into a number of smaller identical spheres whose diameter is 80% of the original ones. Ignoring any minor amount of excess gold which may be left over, how many smaller spheres can be made?

a) 12 b) 20 c) 8 d) 15 e) 19

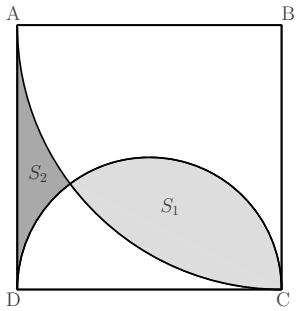
35. For positive integer n, let $S(n)$ be the sum of digits of n. For example, $S(2024) = 2 + 0 + 2 + 4 = 8$. What is $S(1) + S(2) + S(3) + \cdots + S(99)$?

a) 900 b) 950 c) 1000 d) 1050 e) 1100

Section 3

There are 5 questions in this section. Each question is worth 3 points. An incorrect answer carries a penalty of 0.75 points.

36. In the figure below, $ABCD$ is a square and arc AC is a quarter of the circle centered at B. Moreover, arc DC is a semicircle centered at the midpoint of the side DC. If $|AB| = 4$cm and S_1 and S_2 are the areas of the indicated regions, what is the difference $S_1 - S_2$ in square-centimeters?



a) $2(3\pi - 8)$ b) $4(\pi - 2)$ c) $5(\pi - 1)$ d) $6(\pi - 2)$ e) $6(\pi - 1)$

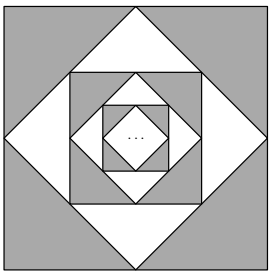
37. A pyramid is built from solid unit cubes that are stacked in square layers which are centered over one another. The top layer has one cube. The layer below it has $3 \times 3 = 9$ cubes. The layer below that has $5 \times 5 = 25$ cubes, and so on, with each layer having two more cubes on a side than the layer above it. The pyramid has a total of 12 layers. Find the exposed surface area of this solid pyramid, including the bottom.

a) 1058 b) 529 c) 144 d) 1634 e) 2050

38. In a sequence of numbers $(b_1, b_2, b_3, \ldots)$, the first two terms are $b_1 = 2$ and $b_2 = 6$, and apart from the first term, each term is one less than the average of its two neighbors. What is the value of b_{32}?

a) 870 b) 930 c) 992 d) 1056 e) 1122

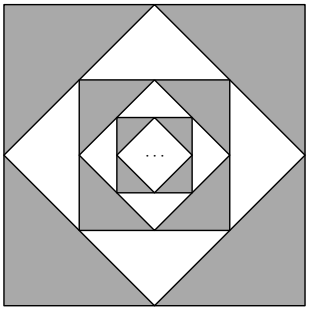
39. Starting with a square of side length 1, we remove the square that connects the midpoints of its sides, then add back the square that connects the midpoints of the sides of the second square, then remove the square that connects the midpoints of the sides of the third square, and so on indefinitely. What is the area of the region left behind?



a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{4}{5}$ e) $\frac{5}{6}$

40. A *polyhedral die* which is a cube that is one inch wide has had its eight corners shaved off. The cube's vertices have been replaced by eight congruent equilateral triangles, and the square faces have been replaced by six congruent octagons. If the combined area of the eight triangles equals the area of one of the octagons, what is that area?

a) $2\sqrt{3}$ b) $\frac{12+2\sqrt{3}}{11}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ d) $\frac{12-2\sqrt{3}}{11}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$



a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{4}{5}$ e) $\frac{5}{6}$

40. النرد متعدد السطوح وهو عبارة عن مكعب يبلغ عرضه بوصة واحدة و أركانه الثمانية مقصوصة. تم استبدال رؤوس المكعب بثمانية مثلثات متساوية الأضلاع، و تم استبدال الوجوه المربعة بستة مثمنات متطابقة. إذا كانت المساحة المجمعة لل ثمانية مثلثات تساوي مساحة أحد المثمنات، ما هي تلك المساحة؟

a) $2\sqrt{3}$ b) $\frac{12+2\sqrt{3}}{11}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ d) $\frac{12-2\sqrt{3}}{11}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

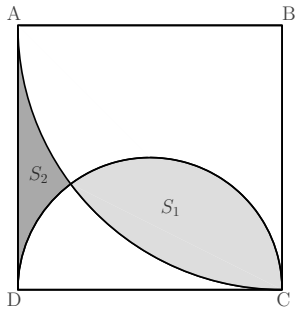
35. للعدد الصحيح الموجب n, دع $S(n)$ تكون مجموع الأرقام في خانات n. على سبيل المثال, $S(2024) = 2 + 0 + 2 + 4 = 8$. ما هي قيمة $S(1) + S(2) + S(3) + \cdots + S(99)$؟

a) 900 b) 950 c) 1000 d) 1050 e) 1100

القسم الثالث

يحتوي هذا القسم على (5) أسئلة. تمنح الإجابة الصحيحة على كل سؤال ثلاث نقاط. وكل إجابة خاطئة تخصم 0.75 نقطة.

36. في الشكل أدناه، $ABCD$ عبارة عن مربع، والقوس AC هو ربع الدائرة التي مركزها B. علاوة على ذلك، فإن القوس DC هو نصف دائرة يتمركز في منتصف الضلع DC.إذا كان $|AB| = 4$ سم وS_1 وS_2 هي المناطق المشار إليها، ما هو الفرق $S_1 - S_2$ بالسنتيمتر المربع؟



a) $2(3\pi - 8)$ b) $4(\pi - 2)$ c) $5(\pi - 1)$ d) $6(\pi - 2)$ e) $6(\pi - 1)$

37. يتم بناء هرم من وحدات مكعبة صلبة و مكدسه في طبقات مربعة تتمركز فوق بعضها البعض. يوجد في أعلى طبقة مكعب واحد.في الطبقة الأسفل منها, يوجد $3 \times 3 = 9$ مكعبات. الطبقة اسفلهما بوجد فيها $5 \times 5 = 25$ مكعبات, و على هذا النحو , كل طبقة بها مكعبان أخران على الجنب مقارنة بالطبقة أعلاها. الهرم مكون من 12 طبقة. أوجد المساحة السطحية المكشوفة لهذا الهرم الصلب, بما في ذلك الجزء السفلي.

a) 1058 b) 529 c) 144 d) 1634 e) 2050

38. في سلسلة من الأرقام $(b_1, b_2, b_3, \ldots)$، أول حدين هما $b_1 = 2$ و $b_2 = 6$ و وباستثناء الحد الأول، كل حد أقل مقدارا واحدا من متوسط الحدين المجاورين له. ما هي قيمة b_{32} ؟

a) 870 b) 930 c) 992 d) 1056 e) 1122

39. بدءًا من مربع طول ضلعه 1، نقوم بإزالة المربع الذي يصل بين نقاط المنتصف لأضلاعه ثم نعيد المربع الذي يصل بين منتصف أضلاع المربع الثاني، ثم نقوم بإزالة المربع الذي يصل بين منتصف أضلاع المربع الثالث، وهكذا إلى الأبد. ما هي مساحة المنطقة المتروكة؟

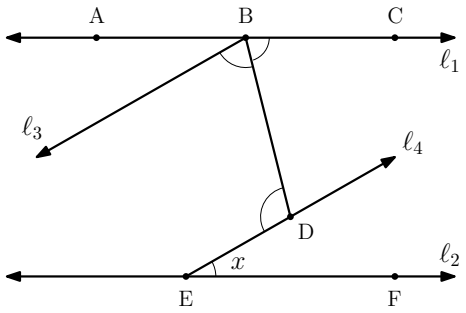
29. يضرب فاضل عدد x مكون من ثلاثة أرقام ب 35 و يحصل على الناتج 4900. لكن عند مراجعة حله, يدرك أن الرقم الصحيح لخانة العشرات للعدد x هو 9 و ليس الرقم الذى استخدمه. ما هو الناتج الصحيح لعملية الضرب؟

a) 6650 b) 6620 c) 6500 d) 6400 e) 5000

30. إذا كان $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{5n}\right)=63$, فما هي قيمة n؟

a) 20 b) 22 c) 24 d) 25 e) 30

31. في الشكل أدناه, الخطان ℓ_1 و ℓ_2 هما خطان متوازيان. و الخطان ℓ_3 و ℓ_4 هما أيضا متوازيان. إذا كان BD هو منصف الزاوية و قيمة الزاوية BDE هي 110 درجة, فما هي قيمة الزاوية DEF بالدرجات؟



a) 25 b) 30 c) 35 d) 40 e) 45

32. في البداية يحتوي صندوق الكنز على أربع عملات نحاسية، وأربع عملات فضية، وخمس عملات ذهبية. عندما يلمس ميداس أي عملة معدنية ملونة بشكل عشوائي، فإنها تختفي بطريقة سحرية، ويتم استبدالها بعملتين جديدتين بالألوان الأخرى. على سبيل المثال، إذا لمس ميداس عملة فضية، فإنها تتحول إلى عملة نحاسية واحدة وعملة ذهبية واحدة. بعد لمستين عشوائيتين متتاليتين من لمسات ميداس ما هو احتمال أن تكون العملات الذهبية أكثر عددا من العملات بالألوان الأخرى؟

a) $\frac{36}{91}$ b) $\frac{32}{91}$ c) $\frac{13}{182}$ d) $\frac{77}{182}$ e) 1

33. ما هو أصغر عدد x صحيح و موجب بحيث يكون مجموع $x+2x+3x+\cdots+100x$ مربع كامل؟

a) 202 b) 5050 c) 1010 d) 100 e) 101

34. سيتم صهر عشر كرات متطابقة من الذهب الصلب وإعادة تشكيلها إلى عدد من الكرات الأصغر المتطابقة التى يبلغ قطرها 80% من الأساسيين. مع تجاهل أي كميات بسيطة فائضة من الذهب, ما عدد الكرات الصغيرة التى يمكن تشكيلها؟

a) 12 b) 20 c) 8 d) 15 e) 19

القسم الثاني

يحتوي هذا القسم على (10) أسئلة. تمنح الإجابة الصحيحة على كل سؤال نقطتين. وكل إجابة خاطئة تخصم 0.5 نقطة.

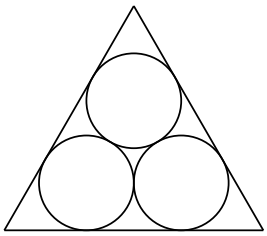
26. يقوم عشر طلاب بإجراء اختبار مكون من 20 سؤالا.جاوب طالبان على 8 أسئلة بشكل سليم و جاوب طالب على 9 اسئلة بشكل سليم. جاوب كل من الطلاب السبعة الباقون 10 اسئلة على الأقل بشكل سليم و متوسط عدد الاسئلة المجابة بشكل صحيح بواسطة هؤلاء الطلاب السبعة هو عدد صحيح. إذا كان متوسط عدد الاسئلة المجابة بشكل سليم بواسطة العشر طلاب هو أيضا عدد صحيح, إذا فالعدد الصحيح هو

a) 14 b) 13 c) 12 d) 11 e) 10

27. يوجد بفندق خمس غرف :A, B, C, D و E. كل غرفة مغلقة وعلى بابها لافتة. معروف أنه يوجد لوحة واحدة بالضبط صحيحة و البقية خطأ. اللافتات على الأبواب تقرأ هكذا:
باب A: "يوجد نمر في هذه الغرفة"
باب B: "يوجد نمر في غرفة واحدة فقط"
باب C: "يوجد نمر في هذه الغرفة"
باب D: "يوجد نمر في هذه الغرفة أو في الغرفة E."
باب E: "يوجد نمر في الغرفة B."
أي غرفة أو غرف يوجد بها نمور؟

a) يوجد نمر في الغرفة A فقط.
b) يوجد نمر في كلا الغرفتين B و D.
c) يوجد نمر في الغرفة C فقط.
d) يوجد نمر في الغرفة B فقط.
e) يوجد نمر في كلا الغرفتين D و E.

28. ثلاث دوائر مماسة بشكل متبادل نصف قطرها 1 يحدها مثلث متساوي الأضلاع بحيث تكون أضلاعه مماسة للدوائر كما هو موضح في الشكل. ما هو طول ضلع المثلث؟



a) $1+3\sqrt{3}$ b) $2+2\sqrt{3}$ c) $3+2\sqrt{3}$ d) $2+3\sqrt{3}$ e) $3+3\sqrt{3}$

18. أضلاع المثلث لها أطوال 8, 11 و c, حيث أن c هو عدد صحيح. كم عدد قيم c التى تجعل المثلث حاد الزوايا؟

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

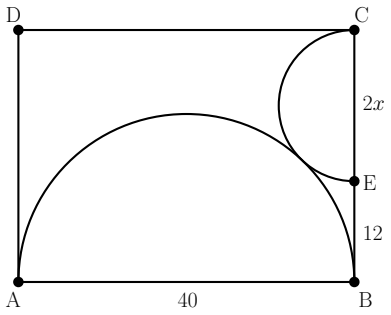
19. دع n يكون عدد موجب بحيث يكون $2024n + 7$ قابل للقسمة على 17 ما هي أصغر قيمة ل n؟

a) 3 b) 6 c) 8 d) 9 e) 10

20. بسط $\cfrac{2024}{2+\cfrac{2024}{2+\cfrac{2024}{2+\cdots}}}$.

a) 1 b) 46 c) 44 d) 1012 e) 2024

21. في الشكل أدناه, $ABCD$ مستطيل و القطعتان المستقيمتان AB و CE هما أقطار ل(شبه) دوائر مماسة لبعضها البعض ما هي قيمة x؟



a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

22. يجلس الضفدع عند نقطة الأصل على خط الأعداد. وفي كل دقيقة، يقفز بشكل عشوائي بمقدار وحدة إلى اليسار أو وحدة إلى اليمين. ما هو احتمال أن يكون على نقطة الأصل بعد القفزة السادسة؟

a) $\frac{14}{64}$ b) $\frac{16}{64}$ c) $\frac{20}{64}$ d) $\frac{24}{64}$ e) $\frac{27}{64}$

23. إذا كانت الدالة هي $f(x) = \sqrt{2 - |3 - 5x|}$, إذا فمجالها هو

a) $\left(-\frac{2}{3},\ 3\right]$ b) $\left[\frac{1}{5},\ 1\right]$ c) $\left[\frac{5}{3},\ 3\right]$ d) $(-2, \infty)$ e) $(0, 1)$

24. إذا كان $|x + 4| < |x - 6|$. ما هي قيمة أكبر عدد صحيح x يحقق الشرط المذكور؟

a) -3 b) -2 c) -1 d) 0 e) 1

25. أي من التعابير التالية يساوي التعبير $\frac{a^2 + b^2 - 9 + 2ab}{b^2 - a^2 + 9 - 6b}$؟

a) $\frac{b - a - 3}{a - b + 3}$ b) $\frac{a + b - 3}{b - a - 3}$ c) $\frac{a + b + 3}{b - a - 3}$ d) $\frac{a + b - 3}{a - b - 3}$ e) $\frac{a + b + 3}{b + a - 3}$

9. الرسم البياني لخط يقع على مستوى $xy-$ له ميل يساوي $\frac{1}{2}$ و يمر بالنقطة $(4,5)$. الرسم البياني للخط الثاني له ميل $\frac{2}{3}$ و يمر بالنقطة $(-2,3)$. إذا تقاطع الخطان في النقطة (a,b), فما هي قيمة $a+b$؟

a) -5 b) -6 c) -7 d) -8 e) -9

10. اتفقت كل من هالة و إيريكا على اللقاء في مقهى. تترك إيريكا العمل وهي تمشي بسرعة 6 كم/ساعة. بعد خمسة دقائق, انطلقت هالة من شقتها راكبة الدراجة على سرعة 20 كم/ساعة.بعد 15 دقيقة أخرى, كلتاهما وصلتا إالى المقهى في نفس الوقت. ما هي المسافة الإجمالية التى قطعوها؟

a) 5.5 km b) 6 km c) 6.5 km d) 7 km e) 7.5 km

11. إذا كان x جذرا لهذه المعادلة $\sin^2 x + 2\sin x = 2 - \cos^2 x$, أي من الأرقام التالية قد تكون قيمة ممكنة ل x؟

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{6}$ e) $\frac{5\pi}{4}$

12. دع m و n يكونان أعدادا صحيحة موجبة. إذا كان $m+mn+n=54$, أي من المجموعات التالية تعطي الحل الكامل ل m؟

a) $\{1,13\}$ b) $\{2,7\}$ c) $\{4,10\}$ d) $\{3,11\}$ e) $\{5,11\}$

13. علما أن القاسم المشترك الأكبر لكل من p و q هو t, و أن $q=rt$, إذا فإن المضاعف المشترك الأصغر لكل من p و q دائما سيساوي

a) pq b) qr c) rt d) pr e) pt

14. إذا كانت ثلاثة رؤوس لمستطيل تقع على النقاط $(1,4)$, $(7,4)$ و $(1,8)$. عند أي نقطة تتقاطع أقطار المستطيل؟

a) $(4,6)$ b) $(3,2)$ c) $(3,1)$ d) $(5,6)$ e) $(7,8)$

15. أربع دوائر يبلغ نصف قطر كل منها وحدتين. تشكل مراكز الدوائر مربعا طول ضلعه 3 وحدات. ما هو إجمالي عدد التقاطعات بين الدوائر؟

a) 6 b) 8 c) 9 d) 10 e) 12

16. كم عدد الأرقام الصحيحة الأصغر من أو تساوي 1000 التى تقبل القسمة على أي من 2 أو 3 أو 5؟

a) 367 b) 483 c) 551 d) 617 e) 734

17. عدد الأعداد الحقيقية المختلفة التى تحقق هذه المعادلة $x^3 + x - 8 = \frac{8}{x^2}$ هو

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

القسم الأول

يحتوي هذا القسم على (25) سؤالا.تمنح الإجابة الصحيحة على كل سؤال نقطة واحدة, وكل إجابة خاطئة تخصم 0.25 نقطة.

1. افترض أن $a > b > 0$ و $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$, فما هي قيمة $\frac{a}{b}$؟

a) 2 b) 3 c) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

2. افترض أن $\sqrt{1+2\sqrt{x}} = 3$, فما هي قيمة x؟

a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 16

3. افترض أن $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 13\sqrt{3}$, إذا قيمة x تساوي

a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{13\sqrt{3}-9}{9}$ d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{13\sqrt{3}-3}{9}$

4. افترض أن قيم a, b, c, d لا تساوي صفر و $a = \frac{2b}{3}$ و $b = \frac{3c}{5}$ و $d = \frac{4c}{5}$, فما هي قيمة $\frac{d}{a}$ ؟

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

5. في بطولة قطر المفتوحة للتنس، يتنافس 28 لاعبًا في نظام إقصاء المغلوب (أي بعد كل مباراة، يبقى اللاعب الفائز في المنافسة ويتم استبعاد اللاعب الخاسر). كم عدد المباريات الملعوبة في البطولة؟

a) 26 b) 27 c) 28 d) 29 e) 30

6. افترض أن $f(x) = 3x + 4$. فما هي قيمة x التي تحقق $f(x) = f^{-1}(x)$؟

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

7. إذا كان مجموع الزوايا الداخلية لمتعدد الأضلاع تساوي $1620°$. فكم عدد أضلاعه؟

a) 8 b) 11 c) 12 d) 15 e) 18

8. أربعة أرقام متباعدة بالتساوي على خط الأعداد و مرتبة (تنازليا) $\frac{1}{20}, \frac{1}{22}, x, y$. ما هي قيمة y؟

a) $\frac{1}{26}$ b) $\frac{2}{21}$ c) $\frac{3}{44}$ d) $\frac{2}{55}$ e) $\frac{3}{26}$

Carnegie Mellon University Qatar

مسابقة يوم باي في الرياضيات

قواعد المسابقة

- يتكون هذا الاختبار من 40 سؤال متعدد الاختيارات. ولكل سؤال إجابات ذات رموز A، B، C، D وE. إجابة واحدة فقط هي الإجابة الصحيحة.
- ضع علامة على إجابتك لكل مسألة في ورقة الإجابة المقدمة. عند كل سؤال، لون الدائرة المقابلة للإجابة المختارة. امسح بالكامل أي أخطاء أوعلامات أخرىسيتم احتساب الإجابات المعلمة بشكل صحيح فقط على ورقة الإجابة.
- **الدرجات** : هناك ثلاثة أقسام في هذا الاختبار.
  - القسم الأول ويتكون من 25 سؤال، يعادل كل منهم درجة واحدة
  - القسم الثاني ويتكون من 10 أسئلة، يعادل كل منها درجتين
  - القسم الثالث ويتكون من 5 أسئلة، يعادل كل منها ثلاث درجات

  الإجابة الصحيحة للسؤال تحتسب درجة كاملة. أما الإجابة الخاطئة تحمل في طياتها خصم 25% من درجة السؤال (أي أن هناك خصم 0.25 للإجابات الخاطئة في القسم الأول، خصم 0.5 للإجابات الخاطئة في القسم الثاني، وخصم 0.75 للإجابات الخاطئة في القسم الثالث). أما الأسئلة التي يتم تركها بدون إجابة، فلا تحتسب لها درجات.
- لا يسمح للمتسابقين بالرجوع للكتب أوالمذكرات أومشاورة الآخرين (باستثناء أعضاء الفريق)، ولا باستخدام الأجهزة الإلكترونية (بما في ذلك الآلات الحاسبة، والهواتف المحمولة، الخ)، أو أية موارد أخرى خلال الاختبار.
- الأشكال غير مطابقة بالضرورة لمقياس الرسم الأصلي.
- قبل البدء بالاختبار، يرجى التأكد من كتابة اسم مدرستك، اسم فريقك (إذا كان لديك واحدا) وأسماء جميع أعضاء الفريق على ورقة الإجابة.
- لديك 90 دقيقة لإتمام الاختبار.
- في نهاية الوقت (90 دقيقة)، على كل فريق أن يقدم ورقة إجابة واحدة.

Carnegie Mellon University Qatar

Seventh Annual Pi Day Mathematics Competition

Preliminary Round Question Booklet

2024